NOTIZEN

Zur Bewegung von Raumladungen nach Diracs Theorie

Von G. Höhler

Institut für theoretische Physik der Universität Göttingen

(Z. Naturforschg. **9a**, 696 [1954]; eingeg. am 29. Juni 1954)

Infeld hat in einer kürzlich erschienenen Arbeit[1] gefunden, daß nach der Diracschen Elektrodynamik[2] eine Raumladungswolke sich in einem äußeren Magnetfeld nicht immer so bewegt, wie man es nach den Lorentzschen Bewegungsgleichungen erwarten würde. Dieses Ergebnis steht im Widerspruch zu der Aussage, daß jede Lösung der Diracschen Theorie die Lorentzschen Bewegungsgleichungen erfüllt[3]. Wir betrachten daher Infelds Rechnung genauer.

Gegeben ist ein homogenes, zeitlich konstantes Magnetfeld in z-Richtung. Für $t=0$ ist ferner die Ladungsverteilung einer Raumladungswolke und ihre Geschwindigkeitsverteilung gegeben. Die Geschwindigkeit soll für alle Ladungselemente gleich sein und genau in z-Richtung zeigen. Gesucht ist der zeitliche Verlauf der Bewegung. Infeld benutzt ein Näherungsverfahren[4], bei dem zunächst das Feld der Raumladung gegen das äußere Feld vernachlässigt wird. Das Viererpotential des Magnetfeldes lautet in Zylinderkoordinaten

$$A_0^* = 0,\; A_\varrho^* = 0,\; A_z^* = 0,\; A_\varphi^* = H\varrho/2. \tag{1}$$

Durch eine Eichtransformation gehen wir zu neuen Potentialen über

$$A_0 = \frac{\partial S}{\partial t},\; A_\varrho = \frac{\partial S}{\partial \varrho},\; A_z = \frac{\partial S}{\partial z},\quad A_\varphi = \frac{H}{2}\varrho + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial S}{\partial \varphi}. \tag{2}$$

S muß so gewählt werden, daß Diracs Normierungsbedingung $A_\mu A_\mu = -k^2$ erfüllt ist. In Infelds Näherung lautet sie

$$A_\varrho^2 + A_\varphi^2 + A_z^2 = 2A_0 k;\; k = m/e_{\mathrm{El}},\; c=1. \tag{3}$$

Das richtig normierte A_μ bestimmt in Diracs Theorie die Vierergeschwindigkeit V_μ

$$kV_\mu = -A_\mu. \tag{4}$$

Da wir als Anfangsbedingung die linke Seite dieser Gleichung vorgeben (in der hier benutzten Näherung $V_\varrho=0$, $V_\varphi=0$, $V_z=v_z$), ist dies eine weitere Forderung an S. Infeld versucht, beide Forderungen durch

$$S = \frac{H}{4}\varrho^2 \operatorname{tg}\frac{H}{2k}t + v_z k z + \frac{1}{2}k v_z^2 t \tag{5}$$

zu erfüllen. Die normierten Potentiale lauten dann *

$$A_0 = \frac{H^2}{8k}\varrho^2\cos^{-2}\frac{H}{2k}t + \frac{1}{2}k v_z^2;$$
$$A_\varrho = \frac{H}{2}\varrho\operatorname{tg}\frac{H}{2k}t;\; A_\varphi = \frac{H}{2}\varrho;\; A_z = v_z k. \tag{6}$$

Sie erfüllen zwar die Normierungsbedingung, nicht aber die Anfangsbedingung der Geschwindigkeit, denn A_μ und damit V_μ haben für $t=0$ neben der z-Komponente noch eine φ-Komponente! Diese ruft nach den Lorentzschen Bewegungsgleichungen gerade die von Infeld gefundene Bewegung hervor. Es ist nicht möglich, durch bessere Wahl von S die Anfangsbedingung zu erfüllen, weil $A_\mu^* + kV_\mu$ einerseits einem Gradienten gleich sein soll, andererseits nicht wirbelfrei ist.

Allgemein wird die „Bewegung nach den Lorentzschen Gleichungen" durch das Gleichungssystem[5]

$$F_{\mu\nu/\nu} = j_\mu = \varrho^0 V_\mu;\; F_{\mu\nu} = A_{\nu/\mu} - A_{\mu/\nu}; \tag{7}$$
$$kV_{\mu/\lambda}V_\lambda = F_{\mu\nu}V_\nu;\; V_\mu V_\mu = -1 \tag{8}$$

beschrieben. Darin ist ϱ^0 die Ladungsdichte im Ruhsystem. Falls ein äußeres Feld vorhanden ist, tritt es in der Bewegungsgleichung (8) additiv zu $F_{\mu\nu}$ hinzu. Diese Gleichung lautet nach Einführung der Potentiale und mit $V_\nu V_{\nu/\mu} = 0$

$$[(A_\nu + kV_\nu)_{/\mu} - (A_\mu + kV_\mu)_{/\nu}]V_\nu = 0. \tag{9}$$

Wir erhalten spezielle Lösungen, wenn wir die eckige Klammer Null setzen, also den Vektor $A_\mu + kV_\mu$ als wirbelfrei annehmen[6]. Bunemann[7] hat gezeigt, daß die Wirbelfreiheit für alle Zeiten erhalten bleibt, wenn sie zu einem Zeitpunkt bestanden hat. $-kV_\mu$ und A_μ sind nun bis auf einen Gradienten gleich und man kann durch eine Eichtransformation auf neue Potentiale $\overline{A}_\mu$ erreichen, daß $kV_\mu = -\overline{A}_\mu$ wird. Die Bedingung $V_\mu V_\mu = -1$ geht dann in Diracs Normierungsgleichung $\overline{A}_\mu\overline{A}_\mu = -k^2$ über. Damit haben wir die Grundgleichungen der Diracschen Theorie gewonnen:

$$F_{\mu\nu/\nu} = \frac{-\varrho^0}{k}\overline{A}_\mu = j_\mu,\quad \overline{A}_\mu\overline{A}_\mu = -k^2. \tag{10}$$

Die Diracsche Theorie gibt also stets Lösungen, die man auch nach den Maxwell-Lorentzschen Gln. (7), (8) erwartet, sie erlaubt jedoch nur spezielle Anfangsbedingungen (Wirbelfreiheit für $A_\mu + kV_\mu$). Diese Tatsache hat Dirac später veranlaßt, von den allgemeineren Maxwell-Lorentzschen Gleichungen (7), (8) auszugehen[8].

[1] L. Infeld, Bull. Acad. Polonaise, Cl. III, **1**, 99 [1953]; s. a. Fortschritte der Physik **1**, 88 [1953].

[2] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **209**, 291 [1951], vergl. [6].

[3] G. Höhler, Ann. Phys. **10**, 196 [1952]. Das Wort „äquivalent" in der Inhaltsübersicht trifft nicht zu. Es muß heißen: daß sie ein Spezialfall der . . . ist.

[4] L. Infeld, Bull. Acad. Polonaise, Cl. III, **1**, 18 [1953].

* Die entsprechende Gleichung Infelds enthält offensichtlich Druckfehler!

[5] Z. B. C. Møller, Theory of Relativity, Oxford, 1952, Chapt. IV, V.

[6] K. Bechert, Ann. Phys. **10**, 430 [1952]; s. a. F. London, Superfluids, New York 1950, § 8.

[7] O. Bunemann, Proc. Roy. Soc. A **215**, 346 [1952].

[8] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **212**, 330 [1952].